

Etude numérique de l'écoulement compressible turbulent dans une tuyère supersonique

El-Ahcene Mahfoudi ^{1,3*}, Abderrahmane Gahmousse ² et Kamel Talbi ¹

¹ Département de Génie Mécanique
Université des Frères Mentouri, Constantine, Algérie

² Laboratoire d'Energétique et Turbomachines, Département de Génie Mécanique
Université Cheikh Larbi Tébessi, Tébessa, Algérie

³ Faculté des Sciences et Technologie, Université Larbi Ben M'Hidi
Ain Beida, Algérie

(reçu le 20 Mars 2013 – accepté le 29 Juin 2013)

Résumé - *Durant le régime de détente dans les tuyères propulsives, plusieurs phénomènes physiques sont rencontrés: jet supersonique, décollement de jet, gradient de pression adverse, onde de choc, couche limite turbulente, couche de mélange fortement compressible, écoulement de retour, turbulence à grande échelle. Ces phénomènes très complexes peuvent considérablement influencer sur les performances de la tuyère. Le présent travail porte sur l'analyse physique et la simulation numérique de l'écoulement turbulent décollé dans une tuyère supersonique à contour idéal tronqué (TIC). La turbulence est modélisée par une approche statistique (FRANS) en coordonnées généralisées, en utilisant un modèle à deux équations de transport (SST-Menter). Le système d'équations régissant cet écoulement est résolu à l'aide de la méthode des volumes finis en maillage structuré. L'intégration en temps est réalisée par le schéma numérique totalement implicite de type prédicteur-correcteur de Mac-Cormack. Alors que les flux convectifs sont discrétisés grâce au schéma de Steger-Warming. Les flux visqueux sont discrétisés par un schéma centré du second ordre. Les résultats numériques obtenus ont permis de retrouver les différents phénomènes observés expérimentalement.*

Abstract - *During the expansion in nozzles, several physical phenomena are encountered: supersonic jet, flow separation, adverse pressure gradient, shock wave, turbulent boundary layer, highly compressible mixing layer, return flow, large-scale turbulence. These complex phenomena can significantly affect the performance of the nozzle. This work focuses on the physical analysis and numerical simulation of turbulent separated flow in a supersonic truncated ideal contoured nozzle (TIC). Turbulence is modeled using a statistical approach (FRANS) in generalized coordinates, using a two-equation model of transport (SST Menter). The system of equations governing the flow is solved using the finite volume method for structured grid. The time integration is performed by the fully implicit numerical scheme of predictor-corrector type of Mac-Cormack, while convective flow is discretized using the Steger-Warming scheme. The numerical results have uncovered various phenomena observed experimentally.*

Mots clés: Jet supersonique - Ecoulement turbulent - Décollement libre - Onde de choc – Modélisation - Tuyères propulsives.

1. INTRODUCTION

Ce travail a pour objectif l'étude numérique des écoulements compressibles turbulents dans les tuyères supersoniques à échelle réduite. Ces tuyères supersoniques à

* el_mahfoudi@yahoo.fr

échelle réduite constituent un moyen économique et très efficace pour l'étude des phénomènes physiques rencontrés dans plusieurs domaines de technologie, tels que les turbines à vapeur et à gaz, les entrées d'air des turboréacteurs, les souffleries supersoniques, les tuyères des moteurs fusées et missile ainsi que les tuyères des lanceurs spatiaux.

L'étude et le développement des tuyères supersoniques sont réalisés sur des maquettes à échelles réduites dans les grands laboratoires de recherches comme : LEA de Poitiers et l'ONERA en France, DLR en Allemagne, NASDA au Japon et NASA aux États-Unis. Les écoulements compressibles à grande vitesse dans les tuyères propulsives convergentes-divergentes ont fait l'objet de plusieurs travaux expérimentaux et numériques, nous pouvons citer [1-13]. Ces travaux montrent la coexistence et la cohabitation d'une grande diversité de phénomènes physiques de la mécanique des fluides.

2. LA TUYERE ETUDIEE

La tuyère considérée est la tuyère LEA-TIC. Elle est réalisée au Laboratoire d'Études Aérodynamiques de Poitiers, France (LEA). C'est une tuyère propulsive supersonique à échelle réduite et à contour idéal tronqué (TIC).

Elle a fait l'objet d'une campagne de mesures expérimentales par Girard *et al.* [7]. Les propriétés géométriques de cette tuyère sont données dans le **Tableau 1**.

Tableau 1: Données géométriques de la tuyère LEA-TIC

Longueur du convergent	45.85 mm
Longueur du divergent	330.00 mm
Rayon d'entrée	89.90 mm
Rayon du col	13.62 mm
Rayon de sortie	75.00 mm

Nous avons considéré les données de l'une des expériences de l'écoulement supersonique réalisée sur la tuyère LET-TIC où elle est alimentée par un réservoir contenant de l'air refroidi et comprimé aux conditions génératrices: $P_c = 34.7$ bars, $T_c = 270$ K.

L'air traverse la tuyère, s'accélère le long de celle-ci et s'éjecte à grande vitesse aux conditions ambiantes: $P_a = 1$ bar, $T_a = 288$ K.

Dans les conditions d'expérience (pression et température), l'air peut être assimilé à un gaz parfait de constante $r_{\text{gaz}} = 287$ J/kg.K avec un coefficient de détente isentropique $\gamma = 1.4$.

3. LE MODELE TURBULENT ADOPTE EN 2D AXISYMETRIQUE

3.1 Equations de Navier-Stokes FRANS

Dans les écoulements de tuyère axisymétrique, il est possible de restreindre le domaine de calcul 3D en 2D axisymétrique. Dans ce cas, les équations de Navier-Stokes FRANS seront écrites dans un système de coordonnées cylindriques (x, r, θ) , auquel

on associe le vecteur vitesse \tilde{V} ($\tilde{v}_x, \tilde{v}_r, \tilde{v}_\theta$). En négligeant les dérivées ortho radiales, le transport des variables conservatives ($\bar{\rho}$, $\bar{\rho}\tilde{v}_x$, $\bar{\rho}\tilde{v}_r$, $\bar{\rho}\tilde{E}_{ef}$, $\bar{\rho}k$, $\bar{\rho}\omega$) s'exprime par rapport aux deux coordonnées spatiales (x, r) de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\tilde{v}_x) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}\tilde{v}_r) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{v}_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\tilde{v}_x\tilde{v}_x + \bar{p}_{ef}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}\tilde{v}_x\tilde{v}_r) = \frac{\partial\tilde{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\tilde{\tau}_{xr})}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{v}_r) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\tilde{v}_r\tilde{v}_x) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}\tilde{v}_r\tilde{v}_r + \bar{p}_{ef}) = \frac{\partial\tilde{\tau}_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\tilde{\tau}_{rr})}{\partial r} + \frac{\bar{p}_{ef} - \tilde{\tau}_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{E}_{ef}) + \frac{\partial}{\partial x}[(\bar{\rho}\tilde{E}_{ef} + \bar{p}_{ef})\tilde{v}_x] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r(\bar{\rho}\tilde{E}_{ef} + \bar{p}_{ef})\tilde{v}_r] \\ \quad = \frac{\partial}{\partial x}[\tilde{\tau}_{xx}\tilde{v}_x + \tilde{\tau}_{xr}\tilde{v}_r + \tilde{q}_x] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r(\tilde{\tau}_{xr}\tilde{v}_x + \tilde{\tau}_{rr}\tilde{v}_r + \tilde{q}_r)] \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}k\tilde{v}_x) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}k\tilde{v}_r) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_k}\right)\frac{\partial k}{\partial r}\right] + S_k \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\omega\tilde{v}_x) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}\omega\tilde{v}_r) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial r}\right] + S_\omega \end{array} \right. \quad (1)$$

où les éléments du tenseur des contraintes de cisaillement sont donnés par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\tau}_{xx} = 2(\mu + \mu_t) \times \left(\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \times \text{div} \tilde{V} \right) \quad \tilde{\tau}_{rr} = 2(\mu + \mu_t) \times \left(\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \times \text{div} \tilde{V} \right) \\ \tilde{\tau}_{xr} = 2(\mu + \mu_t) \times \left(\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial x} \right) \quad \tilde{\tau}_{\theta\theta} = 2(\mu + \mu_t) \times \left(\frac{\tilde{v}_r}{r} \right) \end{array} \right. \quad (2)$$

avec la divergence du champ de vitesse \tilde{V} :

$$\text{div} \tilde{V} = \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{v}_r}{r} \quad (3)$$

3.2 Modèle à viscosité turbulente SST- Menter

Dans cette étude, nous avons utilisé le modèle à 2 équations de transport $k-\omega$ de Menter avec la correction SST (Shear Stress transport), vu son efficacité et sa grande popularité dans les études numériques de calcul des écoulements compressibles dans les tuyères [14-18].

Le modèle $k-\omega$ de Menter [19-22] consiste en une combinaison du modèle $k-\omega$ de Wilcox [23] et $k-\varepsilon$ de Launder-Sharma [24-25] via une fonction de raccord de Menter F_1 . La fonction de Menter contribue à privilégier le modèle de Wilcox, étant donné sa robustesse dans la région interne des couches limites, dans les zones des écoulements soumis à de fort gradient de pression adverse et dans les zones de décollement.

D'autre part, la fonction de Menter permet de basculer progressivement vers le modèle $k-\varepsilon$ de manière à profiter de sa supériorité dans la zone de sillage.

La viscosité turbulente est évaluée, par analogie avec la viscosité moléculaire, comme le produit d'une échelle de vitesse u et une échelle de longueur l , caractéristique de la turbulence. Dans le modèle $k - \omega$, la vitesse u est représentée par une grandeur relative à l'énergie cinétique turbulente k , soit $u \approx \sqrt{k}$. Pour l'échelle de longueur l , elle est donnée en fonction de la dissipation spécifique ω : par $l \approx \frac{\sqrt{k}}{\omega}$.

La fonction de dissipation spécifique ω est reliée à la dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε par la relation suivante:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* \times k} \quad (4)$$

Avec- $\beta^* = 0.09$

La viscosité turbulente est calculée en fonction de l'énergie cinétique turbulente k et de la dissipation spécifique ω par:

$$\mu_t = \frac{\bar{\rho} \times k / \omega}{\max[1\Omega \times F_2 / (a_1 \times \omega)]} \quad (5)$$

Avec Ω la norme du tenseur de vorticité et $a_1 = 0.31$

$$\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij} \times \Omega_{ij}} \quad (6)$$

$$\text{Avec- } \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

La fonction F_2 permet d'éviter à la limitation SST de s'appliquer en dehors des couches limites. Elle est donnée en fonction de la distance à la paroi y par:

$$F_2 = \tanh \times \left\{ \left(\max \left[2 \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega \times y} ; \frac{500 \times \mu}{\bar{\rho} \times \omega \times y^2} \right]^2 \right) \right\} \quad (8)$$

Le modèle de Menter repose sur le transport de deux équations, une pour l'énergie cinétique turbulente et une autre pour la dissipation spécifique :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \times k}{\partial t} + \text{div} \left(\bar{\rho} \times k \times \vec{V} \right) = \text{div} \left[(\mu + \sigma_k \times \mu_t) \overrightarrow{\text{grad}}(k) \right] + S_k \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \times \omega}{\partial t} + \text{div} \left(\bar{\rho} \times \omega \times \vec{V} \right) = \text{div} \left[(\mu + \sigma_\omega \times \mu_t) \overrightarrow{\text{grad}}(\omega) \right] + S_\omega \quad (10)$$

Les termes sources du modèle S_k , S_ω s'écrivent:

$$S_k = P_k - \beta^* \times \bar{\rho} \times k \times \omega \quad (11)$$

$$S_{\omega} = \frac{\gamma \times \bar{\rho}}{\mu_t} \times P_k - \beta \times \bar{\rho} \times \omega^2 + 2(1 - F_1) \times \frac{\bar{\rho} \times \sigma_{\omega}}{\omega} \times \overline{\text{grad}(k)} \times \overline{\text{grad}(\omega)} \quad (12)$$

Avec P_k , la production de k [11]:

$$P_k = \overline{\tau^t : \text{grad}(\vec{V})} \quad (13)$$

Les constantes du modèle s'obtiennent par pondération des constantes du modèle de Wilcox et de Launder-Sharma en utilisant la fonction de Menter F_1 :

$$C_{ste} = F_1 \times C_{ste1} + (1 - F_2) \times C_{ste2} \quad (14)$$

Les constantes du modèle sont les suivantes:

$$\sigma_{k1} = 0.85, \sigma_{\omega1} = 0.5, \beta_1 = 0.075, \gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega1} \times \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}, \kappa = 0.41$$

$$\sigma_{k2} = 1, \sigma_{\omega2} = 0.856, \beta_2 = 0.0828, \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega2} \times \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}, \kappa = 0.41$$

La fonction de raccord de Menter F_1 permet d'utiliser le modèle de Wilcox $k-\omega$ dans la sous-couche visqueuse et la région logarithmique ($F_1 = 1$) et basculer progressivement vers le modèle $k-\varepsilon$ à mesure qu'on s'approche de la zone de sillage ($F_1 = 0$). Cette fonction s'écrit:

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (15)$$

Avec, $\arg_1 = \min[\max(T_1, T_2), T_3]$ (16)

$$T_1 = \frac{500\mu_t}{\bar{\rho} \times \omega \times y^2}, \quad T_2 = \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \times \omega \times y}, \quad T_3 = \frac{4\bar{\rho} \times \sigma_{\omega2} \times k}{D_{k\omega} \times y^2}$$

$$D_{k\omega} = \max\left(\frac{\bar{\rho} \times \sigma_{\omega2}}{\omega} \times \overline{\text{grad}(k)} \times \overline{\text{grad}(\omega)}; 10^{-20}\right) \quad (17)$$

Le terme T_1 intervient dans la sous-couche visqueuse, le terme T_2 dans la zone logarithmique et le terme T_3 dans l'écoulement externe.

4. METHODE NUMERIQUE

Le système d'équations régissant cet écoulement est résolu à l'aide de la méthode des volumes finis en maillage structuré. L'intégration en temps est réalisée par le schéma numérique totalement implicite de type prédicteur-correcteur de Mac-Cormack.

Alors que les flux convectifs sont discrétisés, grâce aux schémas Roe et de Steger-Warming. Les flux visqueux sont discrétisés par un schéma centré du second ordre.

Le domaine d'intégration de la présente étude numérique est constitué de deux domaines distincts qui sont la tuyère et le jet. L'écoulement à l'entrée de la tuyère est subsonique, Nous imposons des conditions aux limites déduites par le calcul 1D à l'entrée ($P_c = 34.7$ bars, $T_c = 288$ K, $P = 34.696$ bars). A la sortie (Frontière Σ_4).

Nous imposons les conditions ambiantes génératrices avec la pression statique P_a supposée constante. Aux parois solides (paroi de la tuyère et la paroi verticale Σ_2 du jet), la condition de non-glissement est imposée.

Ces parois solides sont considérées adiabatiques. Sur la limite inférieure, on impose une condition de symétrie car cette frontière est un axe de symétrie. La frontière Σ_3 correspond à une entrée lointaine à faible vitesse.

Pour cette raison, nous considérons que le fluide rentrant a subi une évolution isentropique de puis les conditions ambiantes, choisies comme génératrices pour cette aspiration.

Le long de cette frontière, les vitesses sont extrapolées et les conditions de température statique et de pression statique sont calculées en fonction des conditions génératrices et des vitesses (Fig. 1).

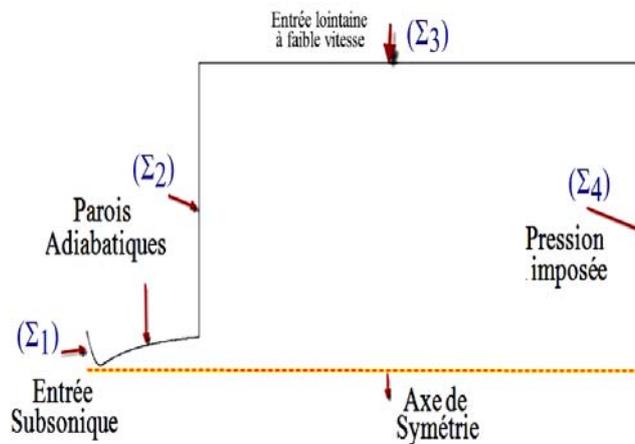


Fig. 1: Conditions aux limites

La figure 2 représente le maillage utilisé pour le calcul numérique. Il est composé de deux blocs:

Le *bloc demi-tuyère en rouge*: il est composé de deux parties, un premier maillage raffiné près de la paroi pour prendre en compte la couche limite et l'autre avec un pas constant près de l'axe de la tuyère.

Le maillage de la demi-tuyère comprend 536 points selon la direction X et 80 points dans la direction Y

Le *bloc extérieur en vert*: il est composé de $157 * 194$ points. Il est raffiné à la sortie de la tuyère et relâché en aval.

Le raccord des domaines de maillage se fait par une continuité de maillage à chaque intersection.

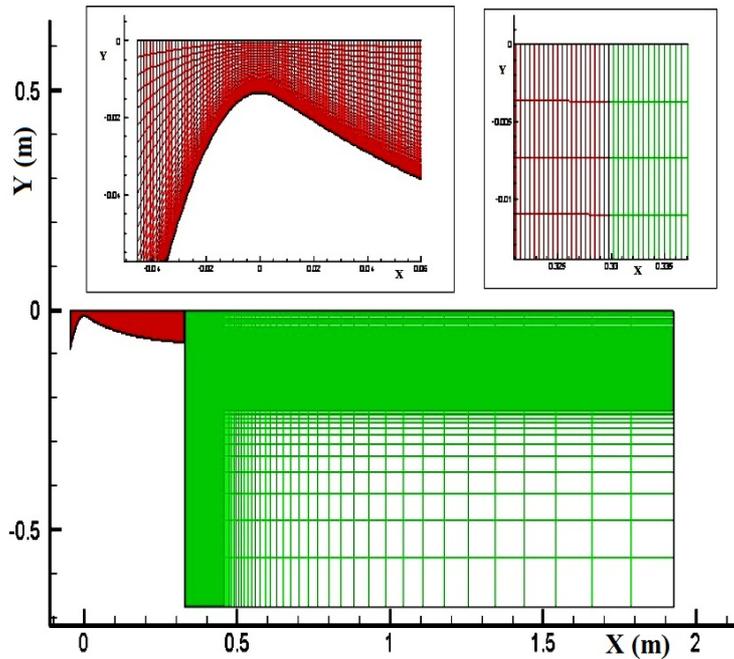


Fig. 2: Maillage de la demi-tuyère et du milieu extérieur

5. RESULTATS ET INTERPRETATIONS

5.1 Organisation de l'écoulement en régime de sur-détente

La figure 3 montre le comportement de l'écoulement en régime de sur-détente pour un rapport de pression $P_c / P_a = 34.7$. L'écoulement ne peut pas se détendre dans tout le divergent de la tuyère et se comprime à travers un choc en $x = 0.2$ m à cause de la contre pression qui est trop élevée.

La couche limite s'épaissit le long des parois du divergent et décolle. Ce décollement induit des ondes de compression qui se focalisent pour former le choc oblique de décollement au travers duquel l'écoulement est dévié. Ce choc incident se réfléchit sur l'axe de la tuyère de façon singulière en formant un choc normal à l'axe appelé disque de Mach.

Ainsi apparaît un point triple, point de rencontre du choc de décollement, du choc réfléchi et du disque de Mach. Du point triple émane une ligne de glissement. Cette discontinuité isobare sépare la poche subsonique en aval du choc fort de la région supersonique en aval du choc réfléchi. La ligne verte présente la région sonique où le nombre de Mach est égale à 1. Cette ligne délimite les régions subsoniques des régions supersoniques.

5.2 Onde de choc

La figure 4 présente l'évolution du nombre de Mach le long de l'axe de la tuyère. Nous remarquons bien l'onde de choc positionnée en $x = 0.202$ m dans le divergent où le nombre de mach atteint une valeur max égale à 5.41 puis chute directement à une valeur subsonique.

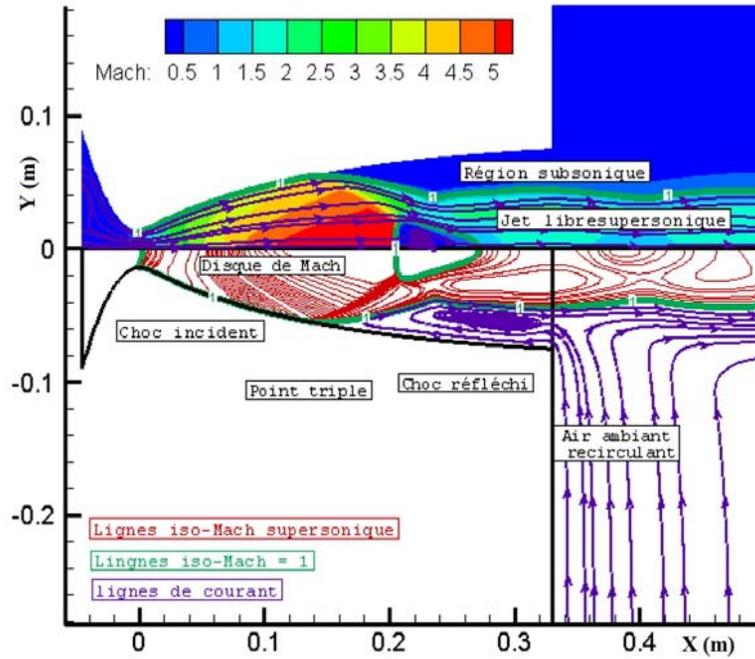


Fig. 3: Organisation de l'écoulement en régime de sur-détente

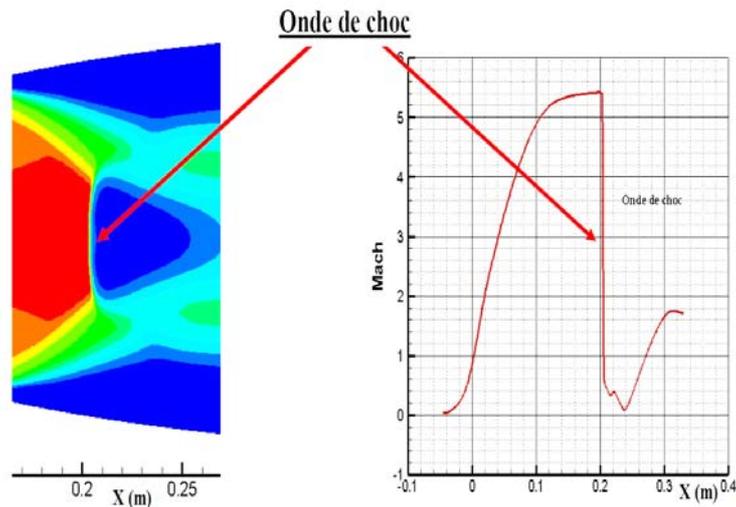


Fig. 4: Le nombre de Mach le long de l'axe de la tuyère

5.3 Contrainte pariétale et décollement de la couche limite

Le point du décollement est situé exactement à $x = 0.1365$ où la contrainte tangentielle à la paroi $\tau_w = 0$. A partir de ce point jusqu'à la sortie de la tuyère, la contrainte pariétale est inférieure à zéro $\tau_w < 0$ (Fig. 5 et 6).

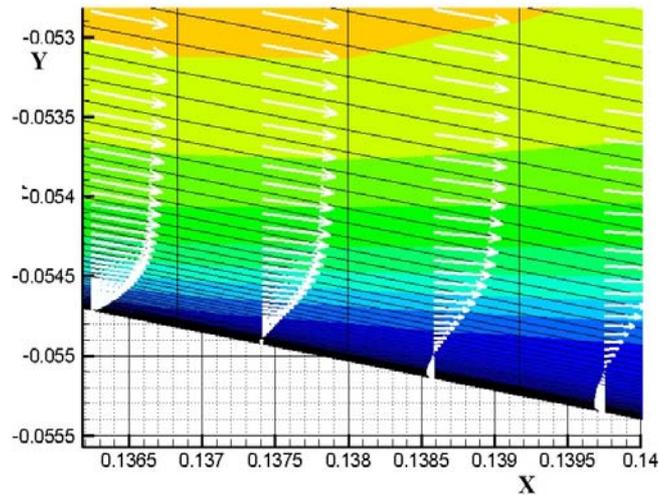


Fig. 5: Décollement de la couche limite

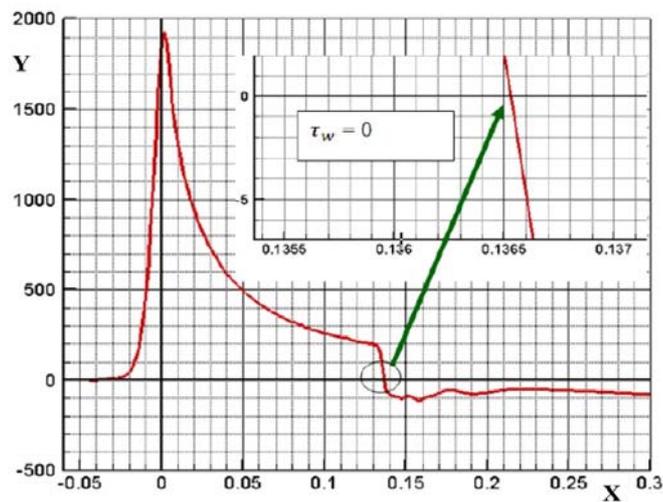


Fig. 6: Contrainte pariétale et point de décollement

5.4 Distribution de la pression pariétale le long de la tuyère

La figure 7 montre l'évolution de la pression pariétale normalisée par la pression chambre le long de la tuyère. La pression pariétale diminue progressivement le long de la tuyère jusqu'à la position du point de décollement.

Le choc de décollement provoque une croissance rapide de la pression pariétale, ensuite elle s'infléchit et atteint un niveau relativement constant proche de la pression ambiante.

Nous remarquons une bonne correspondance entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées.

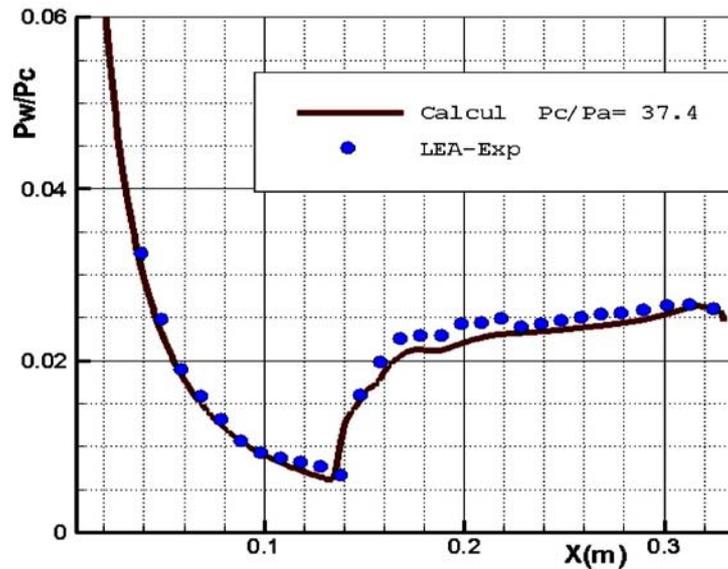


Fig. 7: Distribution de la pression pariétale le long de la tuyère

6. CONCLUSION

Un code de calcul basé sur la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées au sens de Favre est utilisé pour la prédiction de l'écoulement compressible dans une tuyère supersonique.

Le modèle SST-Menter est utilisé pour la prédiction du point de décollement dans la tuyère. Les résultats numériques obtenus, prédisent le comportement de l'écoulement turbulent trouvé expérimentalement.

Les résultats numériques sont en accord satisfaisant avec les résultats expérimentaux. Ainsi, la simulation numérique est devenue un outil incontournable dans l'industrie.

REMERCIEMENTS

Nous remercions le Professeur A. Hadjadj de l'Institut National des Sciences Appliquées, LMFN-CORIA UMR 6614 CNRS, France pour les stages de formation et la disponibilité de la documentation dans le domaine de la simulation numérique des écoulements compressibles.

REFERENCES

- [1] W.J. Baars, C.E. Tinney, J.H. Ruf, A.M. Brown and D.M. McDaniels, 'Wall Pressure Unsteadiness and Side Loads in Overexpanded Rocket Nozzles', AIAA Journal, Vol. 50, N°1, pp. 61 – 73, 2012.
- [2] R. Stark and B. Wagner, 'Experimental Study of Boundary Layer Separation in Truncated Ideal Contour Nozzles', Shock Waves, Vol. 19, N°3, pp. 185 – 191, 2009.

- [3] Y. Perrot, '*Etude, Mise au Point et Validation de Modèles de Turbulence Compressible*', Institut National des Sciences Appliquées, Rouen, 2006.
- [4] P. Reijasse, '*Aérodynamique des Tuyères Propulsives en Sur-Détente: Décollement Libre et Charges Latérales en Régime Stabilisé*', Thèse de Doctorat, Université de Paris VI, 2005.
- [5] C. Pilinski, '*Etude Numérique du Décollement en Tuyères Supersoniques*', Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées, Rouen, 2002.
- [6] M. Frey, '*Behandlung von Strömungsproblemen in Raketendüsen bei Überexpansion*', PhD Thesis, Stuttgart University, Germany, 2001.
- [7] S. Girard et T. Alziary de Roquefort, '*Etude des charges latérales dans une tuyère supersonique surdétendue*', Travaux Universitaires, Nouvelle Thèse, Université de Poitiers, 1999.
- [8] A. Hadjadj, '*Analyse Physique et Simulation Numérique des Ecoulements Compressibles - Applications aux Tuyères de Propulseur*'. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées, Rouen, 1997.
- [9] S. Deck, '*Simulations Numériques des Charges Latérales Instationnaires sur des Configurations de Lanceurs*', Thèse de Doctorat, Université d'Orléans, 2002.
- [10] J. Delery, '*Aérodynamique Interne, Tuyères et Arrières Corps*', Département Aérodynamique, Ecole Nationale Supérieure de l'aéronautique et de l'Espace, Edition Lavoisier, 356 p., 1989.
- [11] A.S. Mouronval, '*Etude Numérique des Phénomènes Aéroélastiques en Aérodynamique Supersonique. Application aux Tuyères Propulsives*', Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées, Rouen, 2004.
- [12] A. Shams, '*Contribution à la Simulation Numérique des Décollements d'Écoulements Turbulents Induits par Choc: Application à l'Écoulement sur-Détente de Tuyère Supersonique*', Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, 2010.
- [13] Bruno Sainte-Rose, '*Simulations Numériques d'Écoulements Réactifs Massivement Décollés par une Approche Hybride RANS/LES*', Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris, 2010.
- [14] Y. Perrot, '*Etude, Mise au Point et Validation de Modèles de Turbulence Compressible*', Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées, Rouen 2006.
- [15] C. Pilinski and A. Nebbache, '*Flow Separation in a Truncated Ideal Contour Nozzle*', Journal of Turbulence, Vol. 5, N°1, pp.b14-14, 2004.
- [16] J.E Bardina, P.G. Huahg and T.J. Coakly, '*Turbulence Modeling Validation, Testing, and Development*', NASA Technical Memorandum 110446, 1997.
- [17] F.R. Menter, '*Improved Two-Equation $k - \omega$ Turbulence Models For Aerodynamic Flows*', Technical Report, NASA Technical Memorandum 103975, 1992.
- [18] F.R. Menter, '*Zonal Two Equation $k-\omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows*', AIAA Journal, Paper N°93-2906, 1993.
- [19] F.R. Menter, '*Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications*', AIAA Journal, Vol. 32, N°8, pp. 1598 - 1605, 1994.
- [20] F.R. Menter, M. Kuntz and R. Langtry, '*Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model*', Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, 2003.
- [21] D.C. Wilcox, '*Reassessment of the Scale Deterring Equation for Advanced Turbulence Models*', AIAA Journal, Vol. 26, N°11, pp. 1299 - 1310, 1988.

- [22] W.P. Jones and B.E. Launder, '*The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence*', International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 15, N°2, pp. 301 - 314, 1972.
- [23] B.E. Launder and B.I. Sharma, '*Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow near a Spinning Disc*', Letters in Heat and Mass Transfer, Vol. 1, N°1, pp. 131 - 137, 1974.