

## Modélisation numérique de la convection naturelle dans un canal vertical rempli partiellement de deux couches poreuses

Nadia Dihmani, Samir Amraqui et Ahmed Mezrhab \*

Université Mohammed Premier, Faculté des Sciences  
Laboratoire de Mécanique & Energétique, 60000 Oujda, Maroc

(reçu le 23 Décembre 2013 – accepté le 30 Juin 2014)

**Résumé** - Dans ce travail, nous présentons une étude numérique décrivant le transfert de chaleur et l'écoulement dans un canal vertical rempli partiellement par un milieu poreux. Le modèle Darcy- Brinkman est utilisé pour la modélisation de l'écoulement. La méthode numérique adoptée pour la résolution des équations différentielles gouvernant le système est de type volumes finis et le couplage pression-vitesse est assuré par l'algorithme SIMPLER. Une étude paramétrique a été réalisée en fonction du nombre de Rayleigh  $Ra$  et du nombre de Darcy  $Da$  sur le transfert de chaleur et l'écoulement. Les résultats sont présentés en termes de champs de température et d'écoulement ainsi que du nombre de Nusselt moyen  $Nu_m$ .

**Abstract** - In this work, we present a numerical study describing the heat transfer and flow in a vertical channel partially filled with a porous medium. The Darcy-Brinkman model is used for modeling the flow. The numerical method adopted for solving differential equations governing the system is finite volume and the pressure-velocity coupling is provided by the SIMPLER algorithm. A parametric study was performed according to the number of Rayleigh  $Ra$  and the number of Darcy  $Da$  on heat transfer and flow. The results are presented in terms of fields of temperature and flow, and the average Nusselt number  $Nu_m$ .

**Keywords:** Finite volume method - Natural convection – Porous medium – Vertical channel.

### 1. INTRODUCTION

Depuis quelques décennies, les phénomènes de transfert de chaleur et les écoulements à travers un milieu fluide ou poreux sont fréquemment rencontrés aussi bien dans la nature que dans l'industrie. Cet intérêt se traduit par de nombreuses applications comme le stockage d'énergie, l'isolation thermique, l'industrie pétrolière, l'isolation thermique, les procédés de séchage, les écoulements géophysiques [1-3].

Parmi les travaux sur la convection naturelle dans les milieux poreux, on cite ceux de Yan *et al.*, [4] qui ont examiné numériquement la convection naturelle dans un canal vertical chauffé asymétriquement. Ils ont présenté les résultats pour un système air-eau sous différentes conditions de chauffage afin d'illustrer le transfert de chaleur lors des processus de l'évaporation et de condensation. Les effets de la longueur du canal et de températures de la paroi humide sur le transfert de chaleur et de masse ont été examinés.

Plus récemment Al-Nimr *et al.*, [5] ont analysé la convection naturelle transitoire développée dans un canal vertical contenant un milieu poreux. Ils ont obtenu des solutions pour quatre conditions aux limites fondamentales et ont donné l'expression du taux du débit volumétrique, de la température du mélange et du Nusselt local

---

\* amezrhab@yahoo.fr

correspondant à chaque cas. Ils ont conclu que lorsqu'un flux de convection naturelle est entièrement développé, l'écoulement atteint sa valeur supérieure et toute augmentation supplémentaire de la hauteur du canal ne produit aucune augmentation de la vitesse d'écoulement. En revanche, en conditions aux limites thermiques, le nombre de Nusselt diminue et atteint une valeur minimale. Ensuite, il reste constant indépendamment de toute nouvelle augmentation de la hauteur du canal.

Orfi *et al.*, [6] ont examiné l'évaporation d'un film liquide mince s'écoulant vers le bas sur la face interne d'une plaque d'un canal vertical. La plaque humide est soumise à un flux uniforme de la chaleur, tandis que la deuxième plaque est prise isotherme et imperméable. Ils ont montré que la chaleur inter-faciale et les transferts de masse dépendent en grande partie de la température d'entrée, du débit d'entrée du film liquide et du flux de chauffage externe. Ils ont observé que le flux de chaleur inter-facial peut être plus grand que le flux de chaleur imposé sur la paroi.

Dhifaoui *et al.*, [7] ont étudié expérimentalement et numériquement les échanges thermiques en convection naturelle dans un canal vertical poreux formé de deux plaques planes parallèles, l'une soumise à un flux de chaleur constant tandis que l'autre est considérée comme adiabatique. Ils ont trouvé que la température dans le milieu augmente en présence de la matrice solide et que l'augmentation du nombre de Rayleigh (flux de chauffage) entraîne une augmentation de la température du milieu, de la vitesse d'infiltration, et une diminution de la pression dans le milieu.

Dans ce papier, nous analysons numériquement le transfert thermique par convection naturelle dans un canal vertical rempli partiellement par un milieu poreux.

## 2. MODELE PHYSIQUE ET FORMULATION MATHEMATIQUE

Le modèle physique étudié est un canal vertical constitué de deux parois parallèles supposées isothermes et maintenues à la température chaude  $T_c$  et partiellement occupé par deux couches poreuses (Fig. 1). Le fluide est supposé incompressible et de propriétés thermophysiques indépendantes de la température, à part sa densité, pour laquelle l'approximation de Boussinesq est supposée valable. L'écoulement est considéré comme laminaire, bidimensionnel, newtonien et soumis au champ de pesanteur.

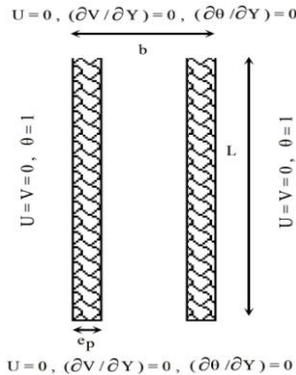


Fig. 1: Représentation schématique du modèle étudié

Le modèle pris en compte est celui de Darcy–Brinkman. L'ensemble des équations gouvernant la conservation de la masse, la quantité de mouvement, de l'énergie s'écrivent sous la forme adimensionnelle comme suit:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \lambda \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \frac{\text{Pr}}{\text{Da}} \frac{U}{K_x} + \text{Ra Pr} \theta \sin \varphi \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + V \frac{\partial V}{\partial X} + U \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \lambda \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{\text{Pr}}{\text{Da}} \frac{V}{K_y} + \text{Ra Pr} \theta \cos \varphi \quad (3)$$

$$\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \text{R}_k \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (4)$$

Où,  $\lambda = \infty$ ,  $\text{R}_k = k_s / k_f$ ,  $\sigma = 1$  dans la région fluide et  $\sigma = \frac{(\rho c)_p}{\varepsilon (\rho c)_f}$  dans le milieu poreux.

Les variables adimensionnelles utilisées sont les suivantes:

$$X = x / b, \quad Y = y / b, \quad U = u_b / \alpha, \quad V = v_b / \alpha, \quad \text{Ra} = g \beta (T_c - T_f) b^3 / \nu \alpha,$$

$$P = (p + \rho_o g y) / \rho_o \alpha^2, \quad \text{Pr} = \nu / \alpha.$$

### 3. PROCEDURE NUMERIQUE

La méthode numérique utilisée pour la discrétisation des équations gouvernant le transfert de chaleur et l'écoulement au sein du canal est de type volumes finis et le couplage pression-vitesse est traité à l'aide de l'algorithme SIMPLER [8].

Les équations du système algébrique obtenu ont été résolues par la méthode des gradients conjugués. Le critère de convergence utilisé est  $\max(\phi^{n+1} - \phi^n) < \varepsilon_\phi$  où  $n$  est l'ordre d'itération et  $\phi$  désigne  $U$ ,  $V$  ou  $\theta$ . Dans la plupart des cas,  $\varepsilon_u$ ,  $\varepsilon_v$ ,  $\varepsilon_\theta$  sont pris inférieurs à  $10^{-7}$ .

Pour la pression et la correction de pression, le test de convergence est réalisé sur la divergence de la vitesse qui doit être inférieure à  $10^{-10}$ .

Une étude préliminaire a été effectuée pour déterminer le maillage assurant le bon compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats. Différents calculs ont été réalisés pour  $\text{Ra} = 10^6$  et  $\text{Ra} = 10^7$  et pour différents maillages uniformes ( $N_x \times N_y$ ).

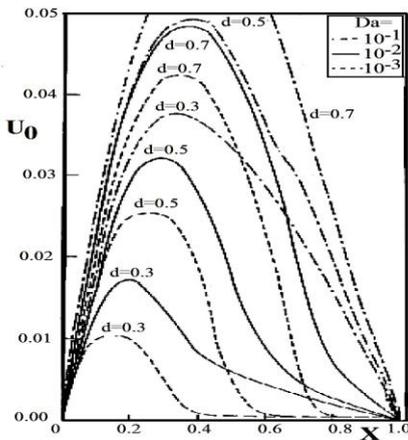
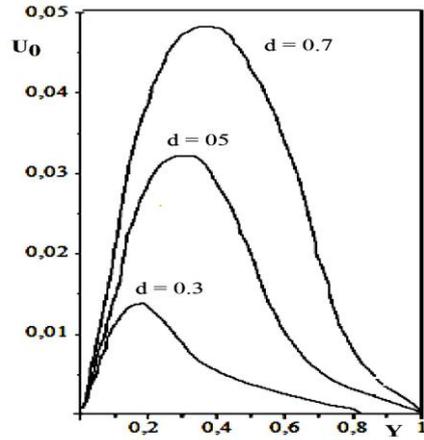
Du **Tableau 1**, on déduit que la différence maximale entre les valeurs de  $\text{Nu}_m$  obtenues par les maillages (30×140) et (30×160) est inférieure à 0.1 %. Par conséquent, la grille de (30×140) a été choisie pour toutes les simulations présentées dans cette étude. Ce maillage est irrégulier et fin au voisinage des parois afin d'augmenter la résolution dans les couches limites.

**Tableau 1:** Test de sensibilité du maillage pour deux  $Ra$ ,  $Pr = 0.71$ 

	$Ra = 10^6$	$Ra = 10^7$
<b>(14 × 90)</b>	16.885	18.282
<b>(14 × 100)</b>	16.891	18.287
<b>(20 × 100)</b>	17.575	19.125
<b>(20 × 120)</b>	17.582	19.132
<b>(24 × 120)</b>	17.847	19.513
<b>(24 × 130)</b>	17.849	19.517
<b>(28 × 130)</b>	18.046	19.797
<b>(28 × 140)</b>	18.047	19.800
<b>(30 × 140)</b>	18.155	19.907
<b>(30 × 160)</b>	18.156	19.914

Le programme que nous avons élaboré pour résoudre les équations de base a été validé sur le problème de convection naturelle dans un canal vertical asymétriquement chauffé et partiellement rempli d'un milieu poreux.

Une comparaison entre les résultats prédits par le présent code et ceux obtenus par Paul *et al.*, [9] est présentée sur la figure 2. Cette figure montre le profil de vitesse pour trois valeurs de l'épaisseur de la couche fluide pour  $Da = 10^{-2}$ . Les courbes obtenues sont comparées à la figure 2 présentée en [9] et montrent un excellent accord.

Résultats de Paul *et al.* [9]

Résultats de nos travaux

Fig. 2: Profil de vitesse pour  $Da = 10^{-2}$ 

#### 4. RESULTATS ET DISCUSSIONS

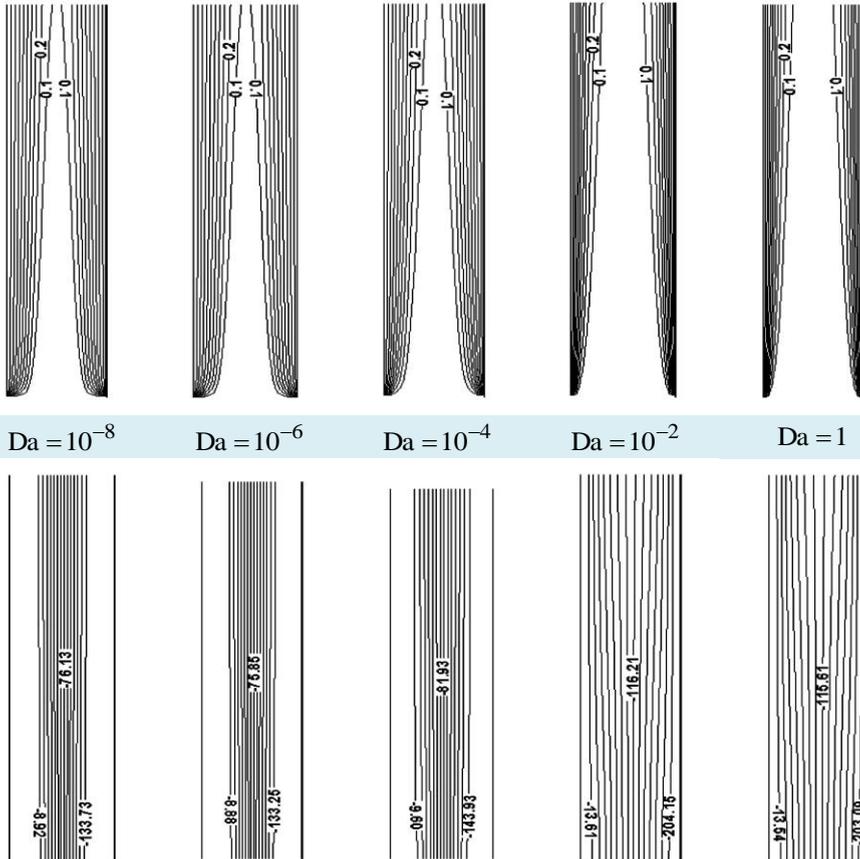
Parmi les paramètres gouvernant le système d'équations, outre le rapport de forme du canal  $A$  et l'épaisseur de la couche poreuse  $e_p^*$ , nous distinguons le nombre de Darcy  $Da$  qui caractérise la perméabilité du milieu et le nombre de Rayleigh  $Ra$ . Le nombre de Prandtl  $Pr$  et le rapport de la conductivité thermique  $R_k$  sont fixés à 0,71 et 1 respectivement.

### 4.1 Isothermes et lignes de courant

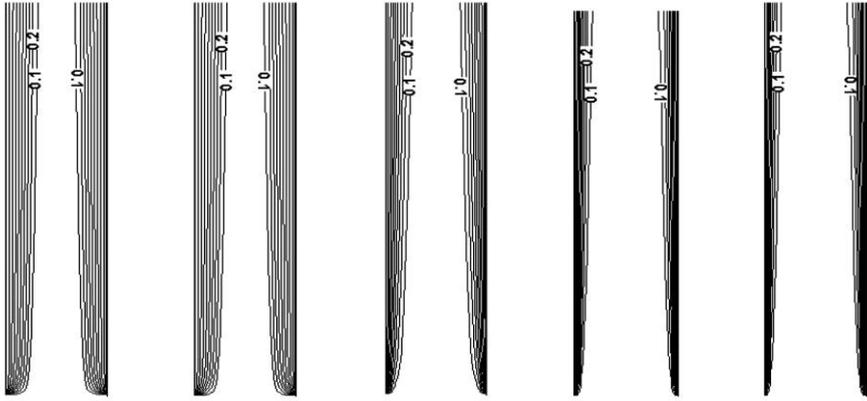
Afin d'étudier l'effet de la pénétration de l'écoulement dans les couches poreuses, nous représentons sur la figure 3 les isothermes et les lignes de courant pour une épaisseur  $e_p^* = 0,2$  pour différents nombres de Darcy  $Da$  et pour  $10^5 \leq Ra \leq 10^7$ .

Dans un premier temps, on note que la vitesse de l'écoulement croît avec le nombre de Darcy et cette augmentation est d'autant plus élevée que le nombre de Rayleigh est grand. Pour  $Da = 10^{-6}$ , le milieu poreux se comporte comme des parois solides et le fluide ne pénètre pas dans les couches poreuses. Toutefois, plus le nombre de Darcy augmente, plus le fluide commence à pénétrer dans le milieu poreux et pour des  $Da \geq 10^{-2}$ , la pénétration du fluide est presque totale et on tend vers le cas d'un écoulement dans un canal fluide.

Les isothermes sont parallèles aux parois du canal et deviennent de plus en plus fine à mesure que les nombres de Darcy et de Rayleigh augmentent.



(a)



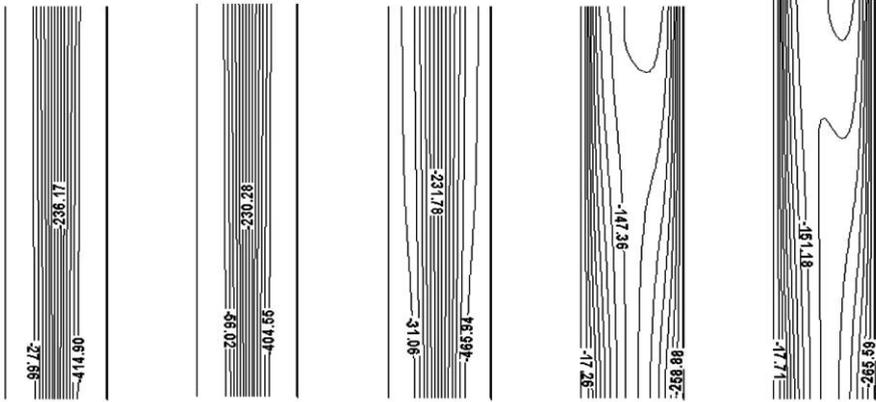
$Da = 10^{-8}$

$Da = 10^{-6}$

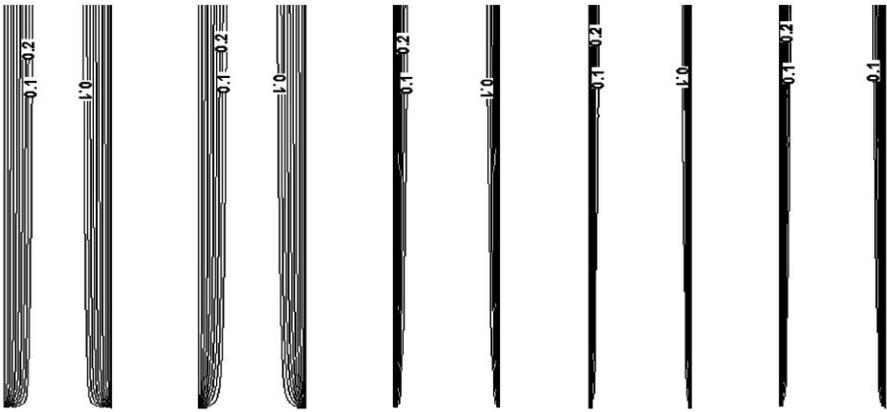
$Da = 10^{-4}$

$Da = 10^{-2}$

$Da = 1$



(b)



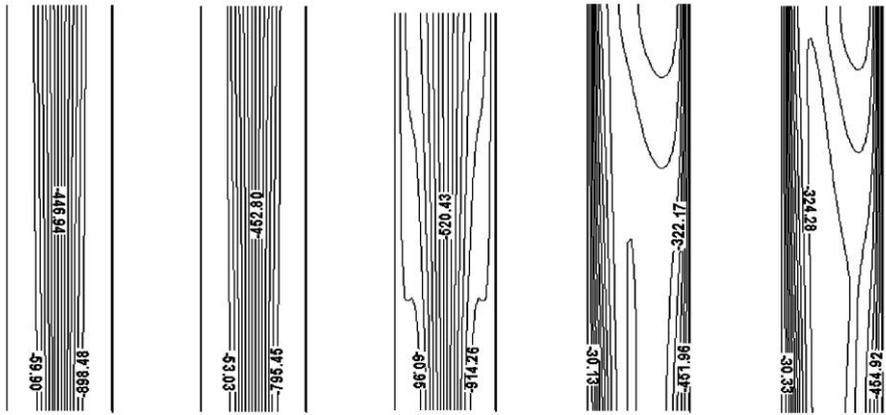
$Da = 10^{-8}$

$Da = 10^{-6}$

$Da = 10^{-4}$

$Da = 10^{-2}$

$Da = 1$



( c )

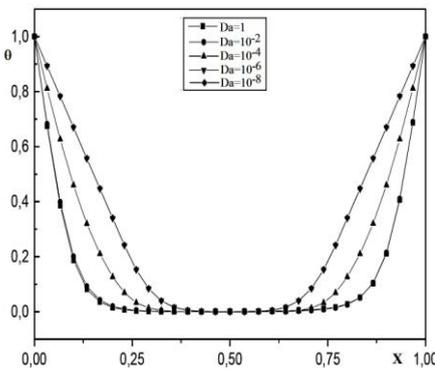
Fig. 3: Isothermes et lignes de courant en fonction de  $Da$ , pour  $e_p^* = 0.2$ :

(a)  $Ra = 10^5$ , (b)  $Ra = 10^6$ , (c)  $Ra = 10^7$

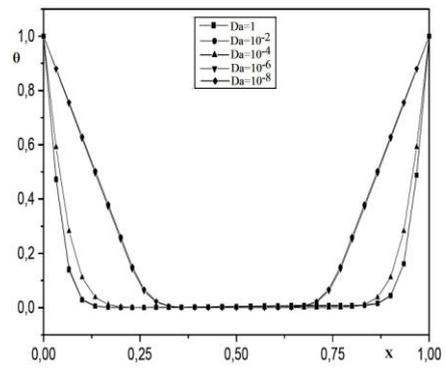
#### 4.2 Température adimensionnelle

Sur la figure 4, nous avons tracé la température adimensionnelle dans le plan médian horizontal pour mieux illustrer l'effet de la variation du nombre de Darcy sur les champs thermiques pour deux valeurs de  $Ra$  ( $Ra = 10^6$  et  $Ra = 10^7$ ).

Ces courbes expliquent très bien l'allure des isothermes. On remarque sur les deux figures que la température est nulle dans la zone centrale du canal, tandis qu'elle prend des valeurs élevées dans les couches poreuses. Pour des faibles perméabilités, la température adimensionnelle  $\theta$  croît avec la diminution du nombre de Darcy. Notons par ailleurs que  $\theta$  est d'autant plus élevée dans la couche poreuse que le nombre de Rayleigh est faible.



( a )



( b )

Fig. 4: Evolution de la température adimensionnelle en fonction de  $X$  pour  $e_p^* = 0.2$  et pour différents nombres de Darcy: (a)  $Ra = 10^6$ , (b)  $Ra = 10^7$

### 4.3 Nombre de Nusselt moyen

Nous présentons sur la figure 5, l'évolution du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes valeurs du nombre de Darcy.

On remarque que le Nombre de Nusselt moyen  $Nu_m$  augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh  $Ra$ , ainsi que l'augmentation du nombre de Darcy  $Da$ . La courbe supérieure correspond au cas où la perméabilité est assez élevée ( $Da = 1$ ) où l'écoulement devient identique à celui en milieu fluide. Alors que la courbe inférieure correspond à une faible perméabilité ( $Da = 10^{-6}$ ) où le milieu poreux se comporte comme des parois solides pour qu'il n'ait pas d'écoulement dans ces couches.

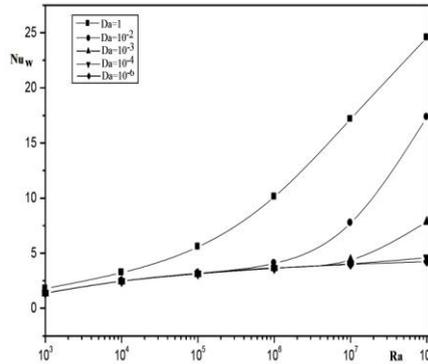


Fig. 5: Evolution du nombre de Nusselt moyen  $Nu_w$  en fonction du nombre de Rayleigh pour différents nombres de Darcy,  $e_p^* = 0.2$

## 5. CONCLUSION

Nous avons étudié dans ce travail, l'influence de l'introduction de minces couches poreuses sur les parois d'un canal vertical maintenues à la température chaude sur le transfert de chaleur et l'écoulement. Dans nos simulations, nous avons fait varier le nombre de Darcy  $Da$ , le nombre de Rayleigh  $Ra$  et l'épaisseur des couches poreuses  $e_p^*$ . Les principales conclusions qui peuvent être tirées de cette étude sont les suivantes:

- Le nombre de Nusselt moyen augmente avec le nombre de Rayleigh.
- Pour un nombre de Rayleigh donné, le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Darcy.
- Pour de forte perméabilité, l'écoulement devient similaire à celui observé dans un canal fluide, alors que pour de faibles valeurs de  $Da$ , le nombre de Nusselt moyen diminue jusqu'à atteindre son minimum pour  $Da = 10^{-6}$  où il n'y a pas d'échanges convectifs dans les couches poreuses.

## REFERENCES

- [1] R.C. Chu and U.P. Hwang, 'Dielectric Fluidized Cooling System', IBM Technical, Disclosure Bulletin, Vol. 20, N°2, pp. 678 – 679, 1977.

- [2] D.A. Nield and A. Bejan, '*Convection in Porous Media*', 2<sup>nd</sup> Ed., Springer, New York, NY, 1999.
- [3] A. Mezrhab, '*Contribution à l'Etude des Transferts Thermiques par Convection Naturelle et par Rayonnement dans des Systèmes Complexes*', Thèse de Doctorat, Université Mohamed Premier, Oujda, Maroc, 1997.
- [4] W.M. Yan, Y.L. Tsay and T.F. Lin, '*Effects of Wetted Walls on Laminar Natural Convection between Vertical Parallel Plates with Asymmetric Heating*', Applied Scientific Research, Vol. 47, N°1, pp. 45 – 64, 1990.
- [5] M.A. Al-Nimr and M.A. Hader, '*MHD Free Convection Flow in Open-Ended Vertical Porous Channels*', Chemical Engineering Science, Vol. 54, N°12, pp. 1883 – 1889, 1999.
- [6] J. Orfi, C. Debbissi, A. Belhaj Mohamed and S.B. Nasrallah, '*Air Humidification by Free Convection in a Vertical Channel*', Desalination, Vol. 168, N°1-3, pp. 161 – 168, 2004.
- [7] B. Dhifaoui, W. Foudhil, S. Jabrallah and A. Belghith, '*Etude Numérique et Expérimentale des Echanges Thermiques au Sein d'un Canal de Milieu Poreux et Soumis à un Chauffage Pariétal*', 12<sup>èmes</sup> Journées Internationales de Thermique, pp. 391 – 394, 15-17 Novembre, Tanger, Maroc, 2005
- [8] S.V. Patankar, '*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*', Hemisphere / Mc Graw-Hill, New York, 1980.
- [9] T. Paul, B.K. Jha and A.K. Singh, '*Free-Convection Between Vertical Walls Partially Filled With Porous Medium*', Heat and Mass Transfer, Vol. 33, N°5, pp. 515 – 519, 1998.