

## Modélisation Numérique des Transferts Thermiques et Massiques lors du Séchage Convectif du Liège

Mounir Kouhila <sup>1</sup>, Abdelhamid Belghit <sup>2</sup>, Abdellah Bennis <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire d'Energétique Solaire Ecole Normale Supérieure, B.P 2400, Marrakech, Maroc,

<sup>2</sup> Laboratoire d'Automatique et Génie des Procédés Faculté des Sciences Semlalia, B.P 2390, Marrakech, Maroc

**Résumé** - *Le liège est un produit forestier d'une grande importance pour l'industrie marocaine. Cet article est une contribution à l'étude numérique des transferts couplés de chaleur et de masse dans un milieu poreux non saturé en l'occurrence le liège. Le présent travail s'appuie sur un modèle théorique qui prend en compte tous les phénomènes reconnus comme fondamentaux pour un milieu poreux homogène et isotrope.*

**Abstract** - *Cork is a forest product having a great importance for Moroccan industry. This paper is a contribution to the numerical study of heat and mass transfers in the cork which is a non saturated porous medium. The present work is based upon a theoretical model taking into account all the fundamental phenomena taking place in an isotropic and homogenous porous medium.*

**Mots clés:** liège - couche limite - milieux poreux - simulation numérique.

### 1. INTRODUCTION

Le liège compte parmi les matériaux les plus abondants au Maroc. Les suberaies (forêts de chêne-liège) occupent une superficie totale de près de 350000 hectares qui s'étendent dans la région nord-occidentale, depuis les plaines du littoral jusqu'au Rif central et moyen Atlas. Avec cette superficie, le Maroc possède 15 % de la superficie mondiale de chêne-liège et près de 70 % des suberaies sont aménagées, dont la moitié des peuplements est assez jeune. Cependant, la production marocaine de liège représente moins de 5 % de la production mondiale. L'année 1988 a constitué un record de vente (213600 m<sup>3</sup>). Le Maroc exporte la quasi totalité de ses produits en liège [1].

Le liège est un produit qui possède d'importantes caractéristiques qui le rendent à la fois utile à l'isolation thermique et indispensable à un grand nombre d'industries (bouchons de bouteilles, flotteurs de toutes espèces, semelles, appareils de protection contre la chaleur et contre le son...).

Peu de travaux ont été consacrés au liège. La majorité des travaux réalisés, concernent soit la structure chimique [2], soit les propriétés thermophysiques [3,4], soit les propriétés mécaniques [2, 5]. Les études thermiques pour la compréhension des phénomènes de transfert ayant lieu dans ce produit ont été très peu abordés ce qui rend cette étude indispensable.

La présence d'un gradient thermique dans un milieu poreux non saturé, induit par une cause naturelle ou artificielle, entraîne un transfert de masse à l'intérieur du produit. Ainsi, l'étude des mécanismes de transferts ayant lieu dans un milieu poreux, est assez compliquée du fait que le couplage entre la masse et la chaleur est incontournable. L'analyse numérique est souvent utilisé pour résoudre ce genre de problème car une étude expérimentale est difficile à cause du caractère bidimensionnel, voire tridimensionnel des phénomènes de transfert. Ainsi, l'objectif de ce travail est d'établir un modèle de séchage

convectif qui permet de déterminer simultanément les distributions des températures et des humidités dans la couche limite et dans le produit humide. Une telle étude est indispensable pour mieux connaître ce produit et mieux l'exploiter.

## 2. DESCRIPTION DU SYSTÈME ET POSITION DU PROBLÈME

L'Aggloméré Expandé Pur (A.E.P.) est un matériau constitué par des granulés expansés en autoclaves par l'effet de la température et de la pression, sans adjonction de liants extérieurs, car le collage est assuré par la subérine. L'A.E.P. d'isolation thermique, qui fait l'objet de cet étude, est produit au Maroc. Tandis que la fabrication des A.E.P. d'isolation acoustique et antivibratoire reste encore faible.

Le système étudié est un lit poreux d'épaisseur  $2e$  et de longueur  $L$  (figure 1), exposé à un flux d'air chaud parallèle à la surface libre du lit poreux. Les conditions de séchage (vitesse  $U_\infty$ , température  $\theta_\infty$  et fraction massique  $C_\infty$ ) de l'air chaud sont supposées constantes à l'entrée du lit. La figure 1 présente schématiquement le modèle et le système de coordonnées adoptés. Comme le système est symétrique, la coordonnée normale  $y$  est comptée à partir du centre du lit.

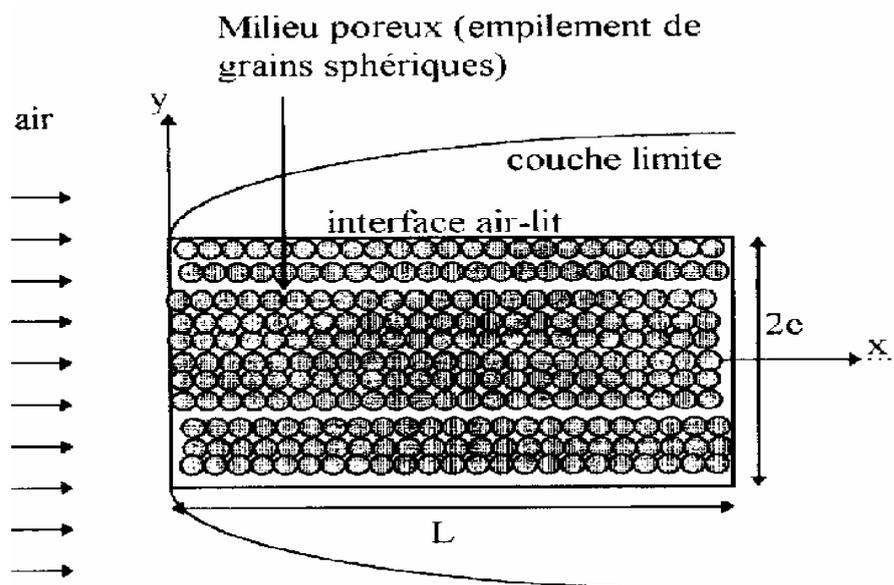


Fig. 1 : Représentation du système et du référentiel choisi

## 3. MODÉLISATION DES TRANSFERTS DANS LE LIÈGE

Certaines hypothèses simplificatrices ont été supposées au niveau de la couche limite, à l'interface air-matériau et dans le matériau considéré comme un milieu poreux (lit), pour simplifier les équations régissant les phénomènes de transfert.

### 3.1. Equations de transfert dans la couche limite

- Equation de transfert d'impulsion et équation de continuité :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

- Equation de transfert de chaleur :

$$u \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + v \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = \frac{\theta_1}{\rho_1 C_{p1}} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} \quad (3)$$

- Equation de diffusion :

$$u \frac{\partial C_1}{\partial x} + v \frac{\partial C_1}{\partial y} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2} \quad (4)$$

### 3.2. Equations de transfert dans le milieu poreux (lit)

- Dans la phase gazeuse :

$$\varepsilon \rho_a V_a \frac{\partial C_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \rho_a D_{va} \frac{\partial C_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \rho_a D_{va} \frac{\partial C_2}{\partial y} \right) - (1 - \varepsilon) \rho_s \frac{\partial M}{\partial t} \quad (5)$$

$$\varepsilon \rho_a V_a C_{pa} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \lambda_a \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \lambda_a \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) + Ah(T - \theta_2) \quad (6)$$

- Dans la phase solide :

$$(1 - \varepsilon) \rho_s C_{ps} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 - \varepsilon) \lambda_s^e \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( (1 - \varepsilon) \lambda_s^e \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Ah(\theta_2 - T) + L_v (1 - \varepsilon) \rho_s \frac{\partial M}{\partial t} \quad (7)$$

$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{1}{(1 + X^2)} \frac{\partial X}{\partial t}$  est la vitesse de séchage du produit et est donnée par une relation empirique obtenue à partir de l'étude de la cinétique de séchage du produit [1].

### 3.3. Conditions initiales et aux limites

Supposons que le milieu poreux est soumis à l'écoulement d'air chaud à partir de l'instant  $t_0$ , alors les conditions aux limites s'écrivent :

$$\forall t < t_0 \quad M = M_0 \text{ et } T = T_0$$

- Conditions aux limites

a)-dans la couche limite :

$$\forall t > t_0 \quad \text{en } x = 0 \text{ et } y = e ; u = v = 0, \theta_1 = \theta_\infty, C_1 = C_\infty$$

$$\text{en } x = 0 \text{ et } \forall y > e ; \theta_1 = \theta_\infty, C_1 = C_\infty, u = U_\infty, v = 0$$

$$\text{en } y = e \text{ et } \forall x \neq 0 ; u = 0, v = V_s$$

$$\text{en } y \rightarrow \infty \text{ et } \forall x ; \theta_1 \rightarrow \theta_\infty, C_1 \rightarrow C_\infty, u \rightarrow U_\infty, v \rightarrow 0$$

b)-dans le lit poreux :

$$\forall t > t_0 \quad \text{en } x = 0 \text{ et } \forall y < e \quad \theta_2 = \theta_\infty, C_2 = C_\infty, T = \theta_\infty$$

$$\text{en } x = L \text{ et } \forall y < e \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial q_2}{\partial x} = \frac{\partial C_2}{\partial x} = 0$$

$$\text{en } y = 0 \text{ et } \forall x \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{\partial C_2}{\partial y} = 0$$

- Condition de continuité des flux de chaleur à la surface air-lit : Les densités des flux thermiques arrivant à la surface sont égales à celles qui sont évacuées au même instant. A la surface, le bilan thermique se traduit par l'équation :

$$I_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} = I_s \frac{\partial T}{\partial y} - L_v r_1 \frac{\partial C_1}{\partial y} \quad (8)$$

### 3.4. Adimensionnalisation et résolution numérique

Pour réduire au maximum le nombre de termes dans les équations et généraliser les résultats, l'adimensionnalisation est le moyen le plus efficace.

Pour la couche limite, on pose les variables adimensionnelles suivantes :

$$x^+ = \frac{x}{L}$$

$$y^+ = \frac{y}{L} \text{Re}_L^{1/2}$$

$$v^+ = \frac{v}{U_\infty} \text{Re}_L^{1/2}$$

$$u^+ = \frac{u}{U_\infty}$$

$$\theta_1^+ = \frac{\theta_1 - \theta_\infty}{T_s(x) - \theta_\infty}$$

$$C_1^+ = \frac{C_1 - C_\infty}{C_s(x) - C_\infty}$$

Concernant le milieu poreux, les grandeurs adimensionnelles sont :

$$x^+ = \frac{x}{L}$$

$$z^+ = \frac{y}{e}$$

$$T^+ = \frac{T}{\theta_\infty}$$

$$\theta_2^+ = \frac{\theta_2}{\theta_\infty}$$

$$C_2^+ = \frac{C_2}{C_\infty}$$

$$t^+ = \frac{U_\infty}{L} t$$

$$\text{Re}_L = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

$$e^+ = \frac{e}{L} \text{Re}_L^{1/2}$$

Avec  $\text{Re}$ , le nombre de Reynolds. En substituant les grandeurs adimensionnelles définies ci-dessus dans les équations (1) à (7) régissant les transferts de masse et de chaleur dans le liège, on obtient les systèmes d'équations adimensionnelles suivants :

#### 3.4.1. Equations adimensionnelles de la couche limite

Après transformation, les équations (1) à (4) deviennent respectivement :

$$u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^{+2}} \quad (9)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = 0 \quad (10)$$

$$u^+ \frac{\partial \theta_1^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial \theta_1^+}{\partial y^+} + \alpha \theta_1^+ = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta_1^+}{\partial y^{+2}} \quad (11)$$

$$u^+ \frac{\partial C_1^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial C_1^+}{\partial y^+} + \beta C_1^+ = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 C_1^+}{\partial y^{+2}} \quad (12)$$

Avec Pr est le nombre de Prandtl et Sc est le nombre de Schmidt

### 3.4.2. Equations adimensionnelles du lit poreux

De la même façon, les équations (5), (6) et (7) deviennent respectivement :

$$F_2 \frac{\partial C_2^+}{\partial x^+} = \frac{\partial}{\partial x^+} \left( D_x \frac{\partial C_2^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial z^+} \left( D_y \frac{\partial C_2^+}{\partial z^+} \right) + B_5 \quad (13)$$

$$F_1 \frac{\partial \theta_2^+}{\partial x^+} = \frac{\partial}{\partial x^+} \left( \lambda_{ax} \frac{\partial \theta_2^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial z^+} \left( \lambda_{ay} \frac{\partial \theta_2^+}{\partial z^+} \right) + B_4 (T^+ - \theta_2^+) \quad (14)$$

$$A_1 \frac{\partial T^+}{\partial t^+} = \frac{\partial}{\partial x^+} \left( \lambda_{sx} \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial z^+} \left( \lambda_{sy} \frac{\partial T^+}{\partial z^+} \right) + B_2 (\theta_2^+ - T^+) + B_3 \quad (15)$$

Avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \rho_s (1 - \varepsilon) \frac{C_{ps} U_\infty}{L} & B_2 &= Ah & B_4 &= Ah & F_1 &= \frac{\rho_a C_{pa} U_\infty}{L} & F_2 &= \frac{\rho_a U_\infty}{L} \\ B_3 &= L_v \frac{\rho_s (1 - \varepsilon)}{\theta_\infty} \frac{\partial M}{\partial t} & B_5 &= \frac{-\rho_s (1 - \varepsilon)}{C_\infty} \frac{\partial M}{\partial t} & D_y &= \frac{\varepsilon \rho_a D_{va}}{e^2} & D_x &= \frac{\varepsilon \rho_a D_{va}}{L^2} \\ \lambda_{ax} &= \frac{\varepsilon \lambda_a}{L^2} & \lambda_{sx} &= \frac{(1 - \varepsilon) \lambda_s}{L^2} & \lambda_{ay} &= \frac{\varepsilon \lambda_a}{e^2} & \lambda_{sy} &= \frac{(1 - \varepsilon) \lambda_s}{e^2} \end{aligned}$$

### 3.5. Méthode de résolution

Les équations (1), (2), (3) et (4) ont été discrétisées à l'aide d'une méthode implicite aux différences finies. Les équations de transferts discrétisées ne sont pas données ici sous peine d'alourdir le texte. Pour les équations (5), (6) et (7), la méthode de Patankar [6] a été choisie car elle s'adapte bien à la résolution des équations différentielles fortement non linéaires couplées et ayant des coefficients variables.

Le système d'équations est donc transformé en un système algébrique qui peut être résolu par différentes méthodes. Pour les équations de la couche limite, la méthode de factorisation [7] a été choisie du fait qu'elle s'adapte aux conditions aux limites choisies.

Quant aux équations du milieu poreux, la résolution est faite par la méthode itérative de Gauss-Seidel [8] dont la mise an œuvre est simple.

#### 4. RÉSULTATS DE LA SIMULATION

L'examen de la figure 2, qui représente l'évolution de la composante horizontale adimensionnelle de la vitesse  $u^+$ , montre que cette dernière subit une chute près du bord d'attaque. Cette diminution est due à la présence du flux de vapeur à l'interface air-lit.

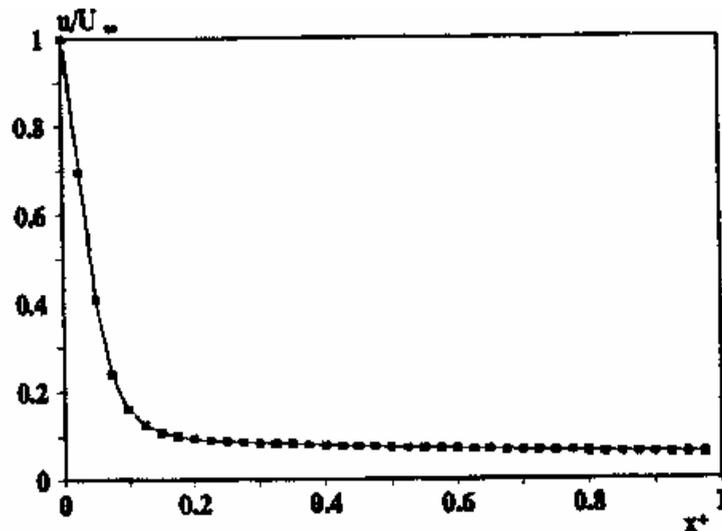


Fig. 2 : Evolution de la vitesse axiale dans la couche limite pour  $y^+ = 0,4$

Les figures 3 et 4 représentent respectivement l'évolution de la température adimensionnelle  $T^+$  du solide en fonction du temps et la variation de la température de l'air dans la couche limite thermique en fonction de  $y^+$  pour plusieurs valeurs de  $x^+$ .

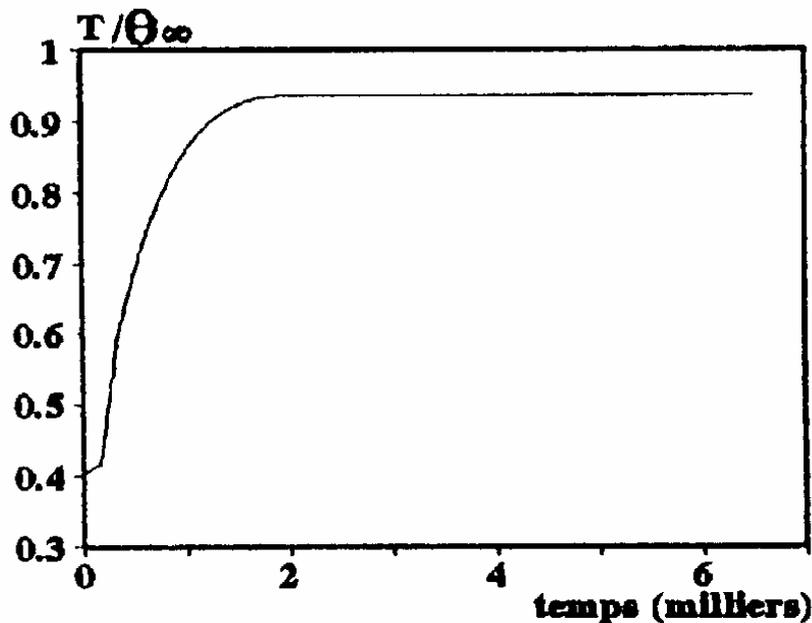


Fig. 3 : Variation temporelle de la température du solide en  $x = 0,2$  m et  $y = 0,08$  m

La figure 3 montre que la température du solide augmente au début du séchage pour atteindre une valeur maximale d'équilibre.

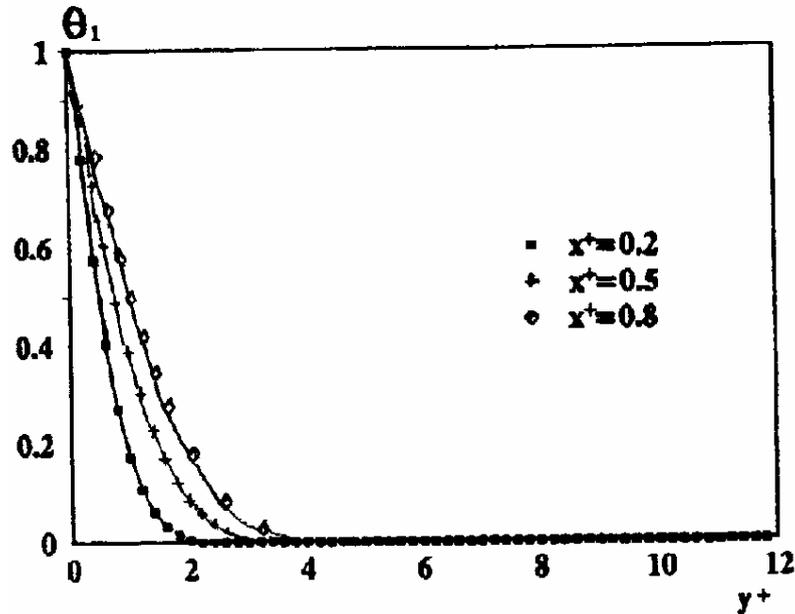


Fig. 4 : Variation de la température dans la couche limite pour plusieurs valeurs de  $x^+$

#### 4.1. Influence de la vitesse de l'écoulement

La figure 5 montre que la vitesse de l'écoulement a une grande influence sur les coefficients de transfert convectif le long du lit poreux. Cette influence est moins importante suite à une augmentation de la température. Pour des grands débits d'air asséchant, les échanges convectifs de chaleur et de matière sont plus importants.

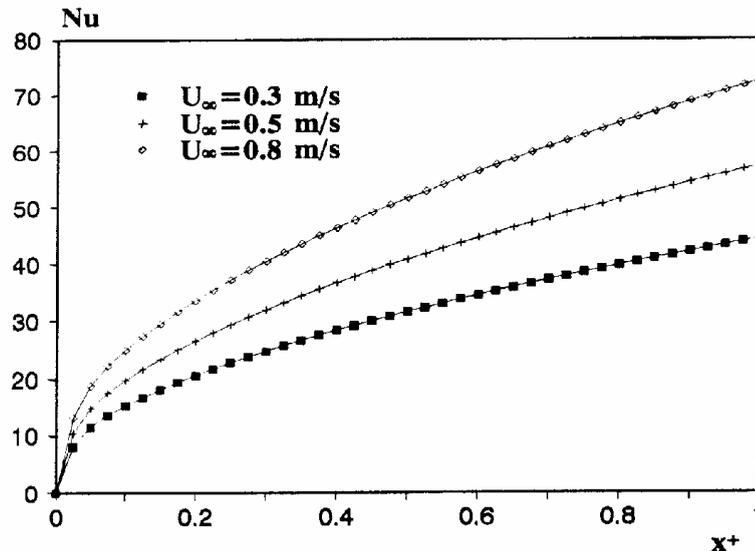


Fig.5 : Evolution du Nusselt local le long du lit pour plusieurs vitesses d'écoulement

#### 4.2. Influence de la température de l'air

La figure 6 représente l'évolution du nombre de Nusselt local le long de la plaque pour différentes températures de l'air asséchant. L'échange convectif est d'autant plus important qu'on s'éloigne du bord d'attaque. Contrairement à l'influence de la vitesse, une

augmentation de la température de séchage entraîne une diminution des flux de chaleur et de masse entre l'air et le produit.

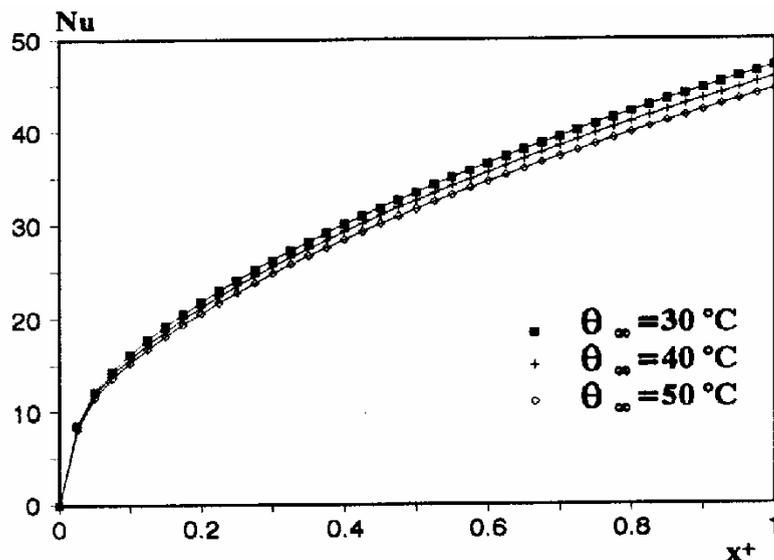


Fig. 6 : Evolution du nombre de Nusselt local le long du lit pour plusieurs températures

La figure 7 représente la variation temporelle de la vitesse de séchage du liège pour plusieurs températures de l'air asséchant. Lorsqu'on augmente la température de l'air, l'humidité relative du lit diminue car en augmentant la température, on favorise l'évaporation de l'eau contenue dans le produit. En effet, cette augmentation entraîne un écart de pression partielle de vapeur d'eau entre la surface et l'air. Par conséquent, l'humidité relative du milieu poreux diminue et le temps de séchage est réduit. On en déduit que la vitesse de séchage augmente (figure 7).

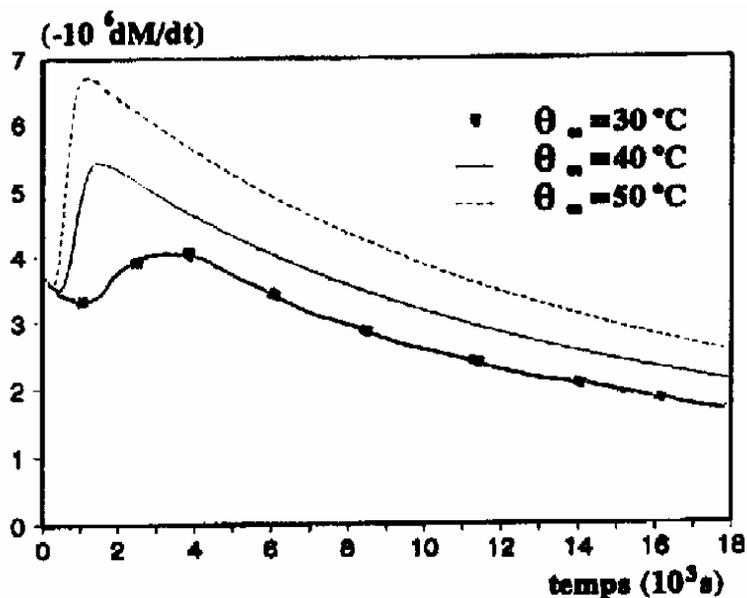


Fig. 7 : Variation temporelle de la vitesse séchage pour plusieurs températures

### 4.3. Influence de l'humidité de l'air

Comme le montre la figure 8, l'humidité de l'air n'a pas d'influence détectable sur la variation du nombre de Nusselt. Par suite, elle n'a pas d'effet significatif sur les coefficients de transfert convectif le long du lit.

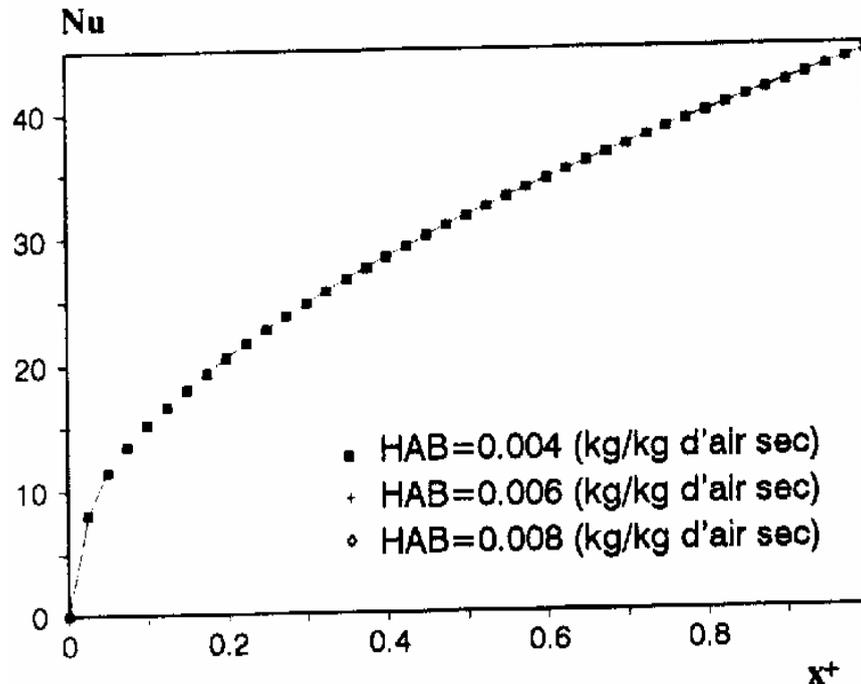


Fig. 8 : Evolution du Nusselt local le long du lit pour plusieurs humidités de l'air

## 5. CONCLUSION

Dans ce travail, le couplage entre les équations de transfert dans un milieu poreux et celles dans la couche limite laminaire qui l'entourent a été étudié. Les distributions spatio-temporelles des températures et des concentrations de l'air dans la couche limite et l'air intergranulaire, des humidités relatives et des températures du solide dans le lit ont été déterminées.

A l'intérieur du produit poreux, il a été montré qu'une augmentation de la température favorise l'évaporation de l'eau contenue dans le produit. L'effet de la température est beaucoup plus important que celui de l'humidité de l'air à l'entrée du lit sur la distribution de l'humidité relative du solide. Cet effet est à son tour plus important que celui observé quand la vitesse de l'air asséchant est augmentée.

Enfin, il faut signaler que le chêne-liège joue un rôle économique et social très important et très apprécié par la population rurale. Sur le plan social par exemple, la réalisation des opérations sylvicoles et subéroles participe à l'atténuation du chômage rural. Un mètre-cube de liège récolté équivaut à une journée de travail, soit un total annuel de 375000 journées de travail [1].

## NOMENCLATURE

$C_1$  : fraction massique de l'air humide dans la couche limite (kg eau.(kg AH)<sup>-1</sup>)

$C_2$	: fraction massique de l'air humide dans le lit	$(\text{kg eau} \cdot (\text{kg AH})^{-1})$
$C_\infty$	: fraction massique de l'air humide asséchant	$(\text{kg eau} \cdot (\text{kg AH})^{-1})$
$C_{pa}$	: capacité calorifique massique de l'air sec	$(\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$
$C_{pl}$	: capacité calorifique massique de l'air dans la couche limite	$(\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$
$C_{ps}$	: capacité calorifique massique du solide	$(\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$
$d$	: diamètre moyen des grains	(m)
$dM/dt$	: vitesse de séchage du produit	$(\text{kg eau} \cdot (\text{kg MH})^{-1} \cdot \text{s}^{-1})$
$Dl$	: coefficient de diffusion de la vapeur dans la couche limite	$(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
$D_{va}$	: coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air du lit	$(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
$e$	: demi épaisseur du lit	(m)
$HAB$	: humidité absolu de l'air asséchant	$(\text{kg eau} \cdot (\text{kg air sec})^{-1})$
$h$	: coefficient de transfert de chaleur par convection	$(\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1})$
$L$	: longueur du lit	(m)
$L_v$	: chaleur massique de vaporisation de l'eau libre	$(\text{J} \cdot \text{kg}^{-1})$
$M_0$	: humidité relative initiale du solide	$(\text{kg eau} \cdot (\text{kg MH})^{-1})$
$M$	: humidité relative du solide	$(\text{kg eau} \cdot (\text{kg MH})^{-1})$
$Nu$	: nombre de Nusselt : $Nu = hd/\lambda_a$	
$t$	: temps	(s)
$T_0$	: température initiale du solide	(K)
$T$	: température du solide	(K)
$U_\infty$	: vitesse de l'air asséchant	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$u, v$	: composantes de la vitesse dans la couche limite	$(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
$V_a$	: vitesse de l'air au niveau des grains	$(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
$X$	: humidité absolue du solide	$(\text{kg eau} \cdot (\text{kg MS})^{-1})$
$x, y$	: coordonnées spatiales	(m)

### Lettres grecques

$\alpha, \beta$	: coefficients adimensionnels	
$\lambda_a$	: conductivité thermique de l'air intergranulaire	$(\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$
$\lambda_1$	: conductivité thermique de l'air dans la couche limite	$(\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$
$\lambda_S^e$	: conductivité thermique apparente du lit	$(\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$
$\rho_a$	: masse volumique de l'air intergranulaire	$(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$
$\rho_1$	: masse volumique de l'air dans la couche limite	$(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$
$\nu$	: viscosité cinématique de l'air dans la couche limite	$(\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$
$\rho_S$	: masse volumique du solide	$(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$
$\varepsilon$	: porosité du lit	
$\theta_1$	: température de l'air dans la couche limite	(K)
$\theta_2$	: température de l'air dans le milieu poreux	(K)
$\theta_\infty$	: température de l'air asséchant	(K)

**Indices et Abréviations**

a	: air	AH	: air humide
s	: solide	MH	: matière humide
va	: vapeur d'eau	MS	: matière sèche

**REFERENCES**

- [1] A. Bennis, *“Transferts de chaleur et de masse lors du séchage du liège par convection forcée”*, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Université Cadi Ayyad, Marrakech, 1997.
- [2] L.-J. Gibson, K.-E. Easterling, M.-F. Ashby, *“The structure and mechanics of cork”*, Proc. R. Soc. Lond, vol A377, pp. 99-117, 1981.
- [3] A. Elbakkouri, *“Caractérisation thermophysique et mécanique de quelques matériaux locaux utilisés dans l’isolation et la construction au Maroc”*, Thèse de 3<sup>ème</sup> Cycle, Tétouan, Maroc, 1996.
- [4] A. Belghit, M. Kouhila, A. Bennis, *“Experimental study of the sorption isotherms of natural and expanded cork”*, Proceedings of the International Drying Symposium (IDS 2000), Hollande, 2000.
- [5] M. Emilia Rosa, M.-A. Fortes, *Journal of Materials Science*, vol 23, pp. 35-421, 1988.
- [6] V.-S. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Mc Graw Hill, London, 1978.
- [7] E.-F. Nogotov, *Application of numerical heat transfer*, Mc Graw Hill, New York, 1978.
- [8] B. Carnahan, H.A. Luther & J.O. Wilkes, *Applied Numerical Methods*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1969.